

Πρώτη Ισχύς $\text{pr}_a \vec{b} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a}$

$\text{pr}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cos \theta \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cos \theta \vec{a}$

Εξωτερικό Γινόμενο

1) Το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα

2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

3) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ και $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (και $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

5) $\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b}$

6) Δω ισχύει η προεκτασιμότητα: $(\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{A}}) \times \underbrace{\vec{c}}_{\vec{B}} = \underbrace{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})}_{\vec{B}}$

$\vec{A}$: το $\vec{a} \times \vec{b}$ εξοριζω $\perp \vec{a}, \vec{b}$

το $\vec{A}$ είναι $\perp \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \Rightarrow$ το $\vec{A}$ παράλληλο στα $\vec{a}, \vec{b}$

το $\vec{B}$ αυτεκ στο επιπέδο των $\vec{a}, \vec{b}$

Ομοίως:

το $\vec{B}$ παράλληλο στα $\vec{b}, \vec{c}$

7) Το $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με διανυσματα ακμω τα $\vec{a}, \vec{b}$.

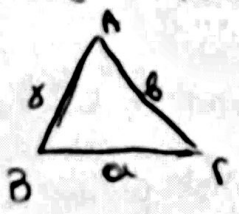
$\vec{a} \times \vec{b} \in \square$ $E = (\text{βάση}) (\text{ύψος}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

8) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ γραμμικά εξαρτημένα

$\theta = (\vec{a}, \vec{b})$

$u = \|\vec{b}\| \sin \theta$

Εφαρμογή: νόμος ημ. των γωνιών: Δίνα το τρίγωνο: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin \gamma}$



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Πολλαπλασιάζω δεξιά με $\vec{b}^\perp$

$\vec{c} \times \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$

$\Rightarrow \|\vec{c}\| \|\vec{a}\| \sin \gamma = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \sin \beta$

$\Rightarrow \frac{c}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \gamma}$

Εξάγετε πρώτο Γινόμενο με Τριπλή Συντεταγμένη

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{Ορισμός} \quad \text{Ορίζεται το } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

όπου τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ η βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$
 $(\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1))$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Παράδειγμα: $\vec{a} = (1, 0, 2), \vec{b} = (0, 1, -1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1)$$

$$(\vec{e}_1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix})$$

Παρατηρώ: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (-2, 1, 1) \cdot (1, 0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0$

Αντίστοιχα και για το $\vec{b}$ ($\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$)

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad (\text{ή αντί για } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 \quad \text{βάζω } \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \text{ το βιολιτζίνο}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0) \times (b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0)$$

$$= a_1 b_1 \vec{x}_0 \times \vec{x}_0 + a_1 b_2 \vec{x}_0 \times \vec{y}_0 + a_1 b_3 \vec{x}_0 \times \vec{z}_0 + a_2 b_1 \vec{y}_0 \times \vec{x}_0 + a_2 b_2 \vec{y}_0 \times \vec{y}_0 + a_2 b_3 \vec{y}_0 \times \vec{z}_0 + a_3 b_1 \vec{z}_0 \times \vec{x}_0 + a_3 b_2 \vec{z}_0 \times \vec{y}_0 + a_3 b_3 \vec{z}_0 \times \vec{z}_0$$

αλλά $\vec{x}_0 \times \vec{x}_0 = \vec{y}_0 \times \vec{y}_0 = \vec{z}_0 \times \vec{z}_0 = \vec{0}$

Εφαρμογή: Δύο Ορθά και Γνήσια $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ συνευθειακά

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ανάλυση: Έστω τα σημάδια P_1, P_2, P_3 μη-συνευθειακά ($\Rightarrow$ ορίζουν τρίγωνο)



$$\vec{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$$

$$\vec{P_1 P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$$

$$\text{Επισημαίνω ότι το εμβαδόν } (\pi) = \frac{1}{2} \|\vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3}\| \Rightarrow \text{Ε}_4(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2} \text{Ε}_4(\pi) =$$

$$= \frac{1}{2} \|\vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3}\|$$

$$\text{άρα } P_1, P_2, P_3 \text{ συνευθειακά } (\Rightarrow) \|\vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3}\| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow |(0,0,(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1))|$$

Προτάση 8 (1) $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ (2) $\vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow$ συνευθειακά τα $\vec{a}, \vec{b}$
 $\lambda \vec{b} \cdot \vec{c} = \lambda (\vec{b} \cdot \vec{c})$

$$(3) \vec{a} = \lambda \vec{b} : \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

Μικτό Γινόμενο Διανυσμάτων

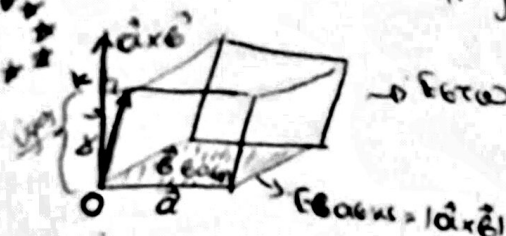
Ορισμός: Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ Ο αριθμός $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ καλείται μικτό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ και συμβολίζεται $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Προτάσεις:

(1) Το μικτό γινόμενο είναι αριθμός.

(2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{c} = \vec{0}$ ή $\vec{a}, \vec{b}$ συνευθειακά (συγγραμμικά) ή $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$ άρα τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ παράλληλα

(3) Το $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ εκφράζει τον όγκο του παραλληλεπίπεδου με ημιερείς τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



→ Έστω ο όγκος $V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$\begin{aligned} V &= (\text{εμβαδόν}) (\text{ύψος}) = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot (\text{ύψος}) = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\text{πρ}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}| = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\angle(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})) = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos(\angle(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})) \\ &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| \end{aligned}$$

πρ $\vec{a} \times \vec{b}$ ← αριθμείται με $\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$

$$(4) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle)$$

$$(5) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ Εκφράση σε συντεταγμένες } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

Γεωμετρική Ερμηνεία των 3×3 ορίσμων.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \text{όγκος του παραλλ. με ημιερείς τα } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

(6) Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ εθενίκεδα $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = 0$.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\gamma}$ και το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$ ^(*) (καθετό και στο επίπεδο που ανήκουν τα $\vec{a}, \vec{b}$)

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι το $\vec{\gamma}$ βρίσκεται κι αυτό στο επίπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$ $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Το $\vec{\gamma}$ παράλληλο στα $\vec{a}, \vec{b} \Rightarrow$ το $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = 0$

(7) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = (\vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{a}) = (\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) \neq (\vec{b}, \vec{a}, \vec{\gamma}) : ((\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{\gamma}))$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{\gamma}$ $\vec{b} \times \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

(8) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{\gamma}$

$\cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{\gamma} = (\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{\gamma}) \vec{a}$

- κυκλικό σχήμα
= το γινόμενο εναλλάξ.

Για το δις-εξωτερικό γινόμενο, δεν ισχύει προεπιλεγμένη ιδιότητα.

• (ταυτότητα Jacobi): $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) + \vec{b} \times (\vec{\gamma} \times \vec{a}) + \vec{\gamma} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$